MAI 1 – písemné cvičení 12.3 (druhá část)

1. Ještě „hezké" příklady na užití „známé" limity :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^3 \underset{AL}{=} e^3$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e} :$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{(\to e)}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{\to 0}} =$$

$$\underset{AL}{=}\frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e}$$

c) $$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^n = +\infty\ !$$

neboť když $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, pak k zvolenému $1<a<e$ existuje (dle definice limity) n_0 tak, že pro všechna $n>n_0$ je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > a$; pak

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^n > a^n,\quad \lim a^n = +\infty \Rightarrow$$

$$\underset{VOS}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$$

2. Limita rekurentně definovaných posloupností

posloupnost (a_n) rekurentně definovaná:

1) je dáno a_1
2) definujeme $a_{n+1} = f(a_n)$, $n=1,2..$
   (f - zobrazení, $f: R \to R$)

Příklady:

1) je dána posloupnost (a_n):

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n=1,2\dots \quad (*)$$

ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

a) pokud posloupnost (a_n) má vlastní limitu $-\lim a_n = L \in R$, pak $L \geq 0$ ($a_n \geq 0$ $\forall n \in N$) a „přejdeme-li k limitě" v rovnosti

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

(lze užít aritmetiku limit, limita $\sqrt{b_n}$ a jednoznačnost limity) (tj: $\lim b_n = b \in R$, $b_n \geq 0 \Rightarrow$, $\Rightarrow \lim \sqrt{b_n} = \sqrt{b}$)

dostaneme $\quad L = \sqrt{2+L}$

a odtud $\quad L^2 - L - 2 = 0$, $\Leftrightarrow (L-2)(L+1) = 0$

$\Rightarrow$ $L = 2$ ($a_n > 0 \Rightarrow L \geq 0$)

b) existuje ale limita posloupnosti (a_n)?

jaké máme možnosti ukázat, že posloupnost (a_n) má vlastní limitu, když ji „neumíme" spočítat?

Máme "větu o monotónní posloupnosti, omezené" (pro neklesající stačí omez. shora, pro nerostoucí zdola)

Musíme tedy ukázat, že posloupnost, definovaná v (*) je rostoucí a omezená, jak „potřebujeme":

odhad: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > a_1$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} > a_2$, atd., tedy „asi" je (a_n) rostoucí posloupnost, a měla by „asi" být omezená: $a_n \le 2$

ukážeme: chceme ukázat, že $\forall n: a_{n+1} \ge a_n$, tj.:

$$\sqrt{a_n+2} \geqq a_n \quad (?) \quad \text{— po umocnění}$$

$$a_n+2 \geqq a_n^2$$

tj. $a_n^2 - a_n - 2 \le 0$, tj. $(a_n-2)(a_n+1) \le 0$ (?)

toto bude platit pro $-1 \le a_n \le 2$ (ale $a_n \geqq 0$), tj. stačí ukázat, že $a_n \leqq 2$ pro $n \in N$:

použijeme indukci:
1) $a_1 = \sqrt{2} < 2$
2) nechť $a_n \leqslant 2$, $n \in N$
3) pak $\underline{a_{n+1}} = \sqrt{2+a_n} \le \sqrt{2+2} = \underline{2}$ (cbd.)

Shrneme-li: (a_n) (def. v (*)) je
1) omezená shora ($0 \leqslant a_n \le 2$)
2) rostoucí

$\Rightarrow$ ex. $\lim a_n = L \in R$

a z první části příkladu pak už víme, že $\underline{\underline{\lim a_n = 2}}$

2) Je dána rekurentně posloupnost (a_n), kde

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right),\ n\in N \quad (*)$$

(z definice (*) je zřejmé, že $a_n>0$)

a) a opět – ex-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L\in R$, pak, přejdeme-li v (*) k limitě (a opět užijeme aritmetiku limit a jednoznačnost, nově předpokládáme-li, že $L>0$? (nevíme?)), je pak

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{2}{L}\right),\ \text{tedy}$$

$$2L^2 = L^2+2 \Rightarrow L^2=2 \text{ a tedy } \underline{L=\sqrt{2}}$$

(neboť $L>0$?)

b) je $L>0$? $\quad a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right) \geqq \sqrt{a_n\cdot\frac{2}{a_n}}=\sqrt{2}$

(užijeme AG nerovnost nebo jednoduše $2\sqrt{ab}\le(a+b)$)

tedy : $\underset{n\in N}{a_{n+1} \geqq \sqrt{2}} \Rightarrow L\geqq\sqrt{2}$ (ex.-li L)

c) „monotonie" (a_n) : odhad: $a_1=2$, pokud existuje limita, je $L=\sqrt{2}$, tedy (a_n) je asi klesající

důkaz: nutno ukázat, že $a_{n+1}\le a_n$ $\forall n\in N$, tj.

(?) $\quad \frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2}{a_n}\right)\leqq a_n$, tj.

$$a_n^2+2\le 2a_n^2$$

$$2\le a_n^2$$

$$\sqrt{2}\le a_n \quad \text{(což jsme čekali)}$$

(upřesnit funguje i „nahoru")

Tedy – $\underline{\lim a_n=\sqrt{2}}$.